OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

1983

CONCOURS D'ENTRÉE

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

N.B. Ce sujet comporte 3 pages de texte.

Soit E un R-espace vectoriel et A un vecteur donné, non nul, de E. u est une forme linéaire sur E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans [R])

On rappelle que la trace d'une matrice carrée M = (a) est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\mathsf{tr}\ \mathsf{M} = \sum_{\mathbf{i}} \mathsf{a}_{\mathbf{i}\,\mathbf{i}}$$

On rappelle aussi que deux matrices semblables ont même trace.

1° - On considère l'endomorphisme de E défini par

$$\forall X \in E$$
 $f(X) = u(X)A$

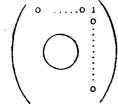
Quel est le rang de f ?

Calculer f^n à l'aide de n , de f , de u et de A.

- 2° Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f . Lorsque E est de dimension finie donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que f soit diagonalisable.
- 3° Soit g un endomorphisme de E . On suppose que le rang de g est 1 et que E est de dimension finie.
 - a) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur q² pour que q soit diagonalisable.
 - b) On suppose que $q^2 = 0$, montrer qu'il existe une base dans laquelle la ma-

.../...

trice de q est



- 4° Hontrer que deux matrices carrées de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.
- 5° Trouver une matrice P inversible telle que

$$P \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} P$$

11

On suppose dans cette partie A choisi tel que $u(A) \neq 0$ et on considère l'endomorphisme h de E défini par

$$\forall X \in E$$
 $h(X) = u(A)X - u(X)A$

- 1° Caractériser la restriction de h au noyau de u .
- 2° Calculer h a l'aide de n, de h, de u et de A
- 3^* Déterminer le noyau de h et son image. (Il pourra être utile de calculer u o h).
- 4" Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de h .
 Lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?
- 5° a) On considère l'équation

$$\alpha x - u(x) x = 0$$

où α est un réel non nul. Résoudre et discuter (par rapport à α) cette équation où X est l'inconnue et où A et u sont donnés.

b) On considère maintenant l'équation

$$\alpha X - u(X)A = B$$

où α est un réel non nul et B un vecteur de E . Résoudre et discuter (par rapport à α et à B) cette équation où X est l'inconnue et où A et u sont donnés.

- 6° Appliquer les résultats de la question précédente aux deux exercices suivants :
 - a) E est l'espace vectoriel des matrices carrées n x n de Ret u l'application définie par

Résoudre dans E l'équation

$$(tr A)X \sim (tr X)A = {}^{t}A - A$$

où A est une matrice donnée de E , de trace non nulle, et tA sa transposée.

b) E est l'espace vectoriel des applications continues de [O, N] dans [R] et u l'application définie par

$$\forall f \in E$$
 $u(f) = \int_{0}^{\pi} f(t) dt$

Résoudre dans E l'équation

$$f(x) = \sin x \int_0^{\pi} f(t) dt = \sin \frac{x}{2} \qquad \forall x \in [0, \pi]$$

où f est l'inconnue.

III

On suppose désormais que E est l'espace vectoriel euclidien de dimension 3.

1° - Montrer que pour toute forme linéaire u, non nulle, sur E, il existe un vecteur \overrightarrow{B} non nul de Z tel que

$$\forall \vec{x} \in E$$
 $u(\vec{x}) = \vec{B}.\vec{x}$ (produit scalaire usuely

- 2° Soit P le plan orthogonal au vecteur \overrightarrow{B} . On appelle p la projection vectoriel) \overrightarrow{e} sur le plan P , parallèlement à la direction définie par un vecteur \overrightarrow{A} donné vérifiant $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} \neq 0$ Calculer $p(\overrightarrow{X})$ à l'aide de \overrightarrow{A} , \overrightarrow{B} , \overrightarrow{X} .
- 3° En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme h de E associé à une forme linéaire u sur E $(u(\overrightarrow{A}) \neq 0)$ défini par

$$\forall \vec{X} \in E$$
 $h(\vec{X}) = u(\vec{A})\vec{X} - u(\vec{X})\vec{A}$