CONCOURS D'ENTRÉE

1983

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

N.B. Ce sujet comporte 3 pages de texte.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un vecteur donné, non nul, de E. u est une forme linéaire sur E (c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$) telle que $u \neq 0$.

On rappelle que la trace d'une matrice carrée $M = (a_{ij})$ est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\operatorname{tr} M = \sum_i a_{ii}$$

On rappelle aussi que deux matrices semblables ont même trace.

I

1° - On considère l'endomorphisme de E défini par

$$\forall X \in E \qquad f(X) = u(X)A$$

Quel est le rang de f ?

Calculer f^n à l'aide de n, de f, de u et de A.

2° - Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
Lorsque E est de dimension finie donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que f soit diagonalisable.

3° - Soit g un endomorphisme de E. On suppose que le rang de g est 1 et que E est de dimension finie.

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur g^2 pour que g soit diagonalisable.

b) On suppose que $g^2 = 0$, montrer qu'il existe une base dans laquelle la ma-

.../...

trice de g est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & \bigcirc & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

4° - Montrer que deux matrices carrées de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

5° - Trouver une matrice P inversible telle que

$$P\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} P$$

II

On suppose dans cette partie A choisi tel que $u(A) \neq 0$ et on considère l'endomorphisme h de E défini par

$$\forall X \in E \qquad h(X) = u(A)X - u(X)A$$

1° - Caractériser la restriction de h au noyau de u .

2° - Calculer h^n à l'aide de n, de h, de u et de A .

3° - Déterminer le noyau de h et son image. (Il pourra être utile de calculer $u \circ h$).

4° - Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de h .
Lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

5° - a) On considère l'équation

$$\alpha X - u(X)A = 0$$

où α est un réel non nul. Résoudre et discuter (par rapport à α) cette équation où X est l'inconnue et où A et u sont donnés.

b) On considère maintenant l'équation

$$\alpha X - u(X)A = B$$

où α est un réel non nul et B un vecteur de E . Résoudre et discuter (par rapport à α et à B) cette équation où X est l'inconnue et où A et u sont donnés.

6° - Appliquer les résultats de la question précédente aux deux exercices suivants :

a) E est l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ de $\mathbb{R}$ et u l'application définie par

$$\forall M \in E \qquad u(M) = \mathrm{tr}\, M$$

Résoudre dans E l'équation

$$(\mathrm{tr}\, A)X - (\mathrm{tr}\, X)A = {}^tA - A$$

où A est une matrice donnée de E , de trace non nulle, et ${}^tA$ sa transposée.

b) E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ et u l'application définie par

$$\forall f \in E \qquad u(f) = \int_0^{\pi} f(t)\,dt$$

Résoudre dans E l'équation

$$f(x) - \sin x \int_0^{\pi} f(t)\,dt = \sin \frac{x}{2} \qquad \forall x \in [0, \pi]$$

où f est l'inconnue.

III

On suppose désormais que E est l'espace vectoriel euclidien de dimension 3.

1° - Montrer que pour toute forme linéaire u, non nulle, sur E, il existe un vecteur $\vec{B}$ non nul de E tel que

$$\forall \vec{X} \in E \qquad u(\vec{X}) = \vec{B}.\vec{X} \qquad \text{(produit scalaire usuel)}$$

2° - Soit P le plan orthogonal au vecteur $\vec{B}$. On appelle p la projection vectorielle sur le plan P , parallèlement à la direction définie par un vecteur $\vec{A}$ donné vérifiant $\vec{A}.\vec{B} \neq 0$
Calculer $p(\vec{X})$ à l'aide de $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{X}$.

3° - En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme h de E associé à une forme linéaire u sur E $(u(\vec{A}) \neq 0)$ défini par

$$\forall \vec{X} \in E \qquad h(\vec{X}) = u(\vec{A})\vec{X} - u(\vec{X})\vec{A}$$
